Simulare Bacalaureat

Clasa a XI-a

Matematică M_şt-nat

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (6 x 5p = 30 de puncte)

1. Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1,}$ ştiind că $a_2 = 4$ şi $a_3 = 7$.
2. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$. Determinaţi numărul natural n pt care $f(n) = 8$.
3. Rezolvaţi în multimea numerelor reale ecuaţia $log_2(3x - 5) = log_2(x + 7)$.
4. Determinaţi câte numerele naturale de trei cifre au proprietatea că produsul cifrelor lor este egal cu 8.
5. În reperul cartezian x0y se consideră punctele A(0,5), B(8,4) şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO = AC.
6. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB = 2 şi tg B =3. Arătaţi că BC = $2\sqrt{10}$.

SUBIECTUL II (1. a), b), c) şi 2. a), b), c) x 5p = 30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x+4 \\ 2x & 4x-3 \end{pmatrix}$, unde $x \in R$.
   a) Arătaţi că det A = 1.
   b) Determinaţi numărul real x pentru care det $(B(x) - xA) = x$.
   c) Determinaţi numărul real x pentru care $B(x) + B(x+2) = 2A \cdot A \cdot A$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + y + (a+1)z = a \\ x + ay - z = 4 \\ 2x - ay + 4z = -4 \end{cases}$, unde $a \in R$.
   a) Arătaţi că $\det(A(1)) = -9$.
   b) Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică (sistem compatibil determinat).
   c) Pentru $a = -1$, rezolvaţi sistemul de ecuaţii de mai sus.

SUBIECTUL III (1. a), b), c) şi 2. a), b), c) x 5p = 30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$.
   a) Arătaţi că $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{3f(x) - xf'(x)} = \frac{2}{3}$.
   b) Arătaţi că $f"(x) = 6(x - 3)$, $x \in R$.
   c) Determinaţi intervalele de convexitate/concavitate a funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$.
   a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x \in R$.
   b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
   c) Demonstraţi că $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$, pentru orice $x \in [-3,4]$.

Subiect propus de:

prof. **Bâta Oliviţa-Maria**

Liceul Tehnologic „Vasile Netea” Deda

SIMULARE BACALAUREAT – CLASA A XI-A

Matematică $M_$șt-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Subiect propus de: prof. Bâta Olivița-Maria – Liceul Tehnologic „Vasile Netea" Deda

Notă:

- Se acordă **10 puncte din oficiu**. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Determinarea termenului a_4:

- Calculul rației progresiei aritmetice: $r = a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$ **2p**
- Calculul celui de-al patrulea termen: $a_4 = a_3 + r = 7 + 3 = 10$ **3p**

2. Determinarea numărului natural n:

- $f(n) = 8 \implies n^2 - 1 = 8 \implies n^2 = 9$ **2p**
- Cum $n \in \mathbb{N}$, obținem $n = 3$ **3p**

3. Rezolvarea ecuației logaritmice $\log_2(3x-5) = \log_2(x+7)$**:**

- Condiții de existență: $3x - 5 > 0$ și $x + 7 > 0 \implies x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ **1p**
- Egalarea argumentelor: $3x - 5 = x + 7 \implies 2x = 12$ **2p**
- Soluția $x = 6$ (convine domeniului de existență) **2p**

4. Numere naturale de trei cifre cu produsul cifrelor egal cu 8**:**

- Fie numărul $\overline{abc}$, cu $a, b, c \in \{1, 2, 4, 8\}$ și $a \cdot b \cdot c = 8$:
- Cifre $\{1, 1, 8\}$: 3 numere $(118, 181, 811)$ **1p**
- Cifre $\{1, 2, 4\}$: $3! = 6$ numere $(124, 142, 214, 241, 412, 421)$ **2p**
- Cifre $\{2, 2, 2\}$: 1 număr (222) **1p**
- Numărul total este $3 + 6 + 1 = 10$ numere **1p**

5. Demonstrarea egalității $AO = AC$**:**

- Coordonatele mijlocului C al segmentului OB, unde $O(0,0)$ și $B(8,4)$: $x_C = \frac{0+8}{2} = 4$, $y_C = \frac{0+4}{2} = 2 \implies C(4,2)$ **2p**
- Calculul lungimii AO: $AO = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2} = 5$ **1p**
- Calculul lungimii AC: $AC = \sqrt{(4-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \implies AO = AC$ **2p**

6. Demonstrarea egalității $BC = 2\sqrt{10}$**:**

- În $\triangle ABC$ dreptunghic în A: $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \implies 3 = \frac{AC}{2} \implies AC = 6$ **2p**
- Aplicarea teoremei lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$ **2p**
- Finalizare: $BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Matrici:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1$ **3p**

$\det A = 2 - 1 = 1$ **2p**

b) $B(x)-xA=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & x\\ x & 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ x & 2x-3\end{pmatrix}$ **2p**

$\det(B(x)-xA)=1\cdot(2x-3)-4\cdot x=-2x-3$ **1p**

$-2x-3=x \implies 3x=-3 \implies x=-1$ **2p**

c) $B(x)+B(x+2)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+3 & x+6\\ 2x+4 & 4x+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}$ **2p**

$A^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix} \implies A^3=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 8 & 13\end{pmatrix} \implies 2A^3=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$ **2p**

Din egalitatea matricelor rezultă $\begin{cases}2x+4=10\\ 2x+10=16\\ 4x+4=16\\ 8x+2=26\end{cases} \implies x=3$ **1p**

2. Sistem de ecuații liniare:

a) Scrierea matricei $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ **1p**

Calculul determinantului: $\det(A(1))=4-2-2-4-1-4=-9$ **4p**

b) Sistemul este compatibil determinat $\iff \det(A(a))\neq 0$ **1p**

$\det(A(a))=4a^2-2-a(a+1)-2a(a+1)-a^2-4=-3a-6=-3(a+2)$ **2p**

$-3(a+2)\neq 0 \implies a\neq -2$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ **2p**

c) Pentru $a=-1$: $\begin{cases}-x+y=-1\\ x-y-z=4\\ 2x+y+4z=-4\end{cases}$ **1p**

Adunând primele două ecuații: $-z=3 \implies z=-3$ **1p**

Din prima ecuație $y=x-1$; înlocuind în a treia: $2x+(x-1)-12=-4 \implies 3x=9 \implies x=3$ **2p**

$y=3-1=2 \implies$ soluția este $(x,y,z)=(3,2,-3)$ **1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$:

a) $f'(x)=3x^2-18x$, $f'(1)=-15$, $f(1)=-5$ **1p**

$f'(x)-f'(1)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$ **1p**

$3f(x)-xf'(x)=3(x^3-9x^2+3)-x(3x^2-18x)=-9x^2+9=-9(x-1)(x+1)$ **2p**

$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-5)}{-9(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-5}{-3(x+1)}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$ **1p**

b) $f'(x)=(x^3-9x^2+3)'=3x^2-18x$ **2p**

$f''(x)=(3x^2-18x)'=6x-18=6(x-3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **3p**

c) Rezolvarea ecuației $f''(x)=0 \implies 6(x-3)=0 \implies x=3$ **1p**

Pentru $x\in(-\infty,3)$, $f''(x)<0 \implies f$ este concavă pe $(-\infty,3]$ **2p**

Pentru $x\in(3,+\infty)$, $f''(x)>0 \implies f$ este convexă pe $[3,+\infty)$ **2p**

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-8}{e^x}$:

a) $f'(x)=\frac{(x^2-8)'e^x-(x^2-8)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{2xe^x-(x^2-8)e^x}{e^{2x}}$ **3p**

$f'(x)=\frac{-x^2+2x+8}{e^x}=\frac{-(x+2)(x-4)}{e^x}=\frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **2p**

b) Formula ecuației tangentei: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ **1p**

$f(0)=\frac{0^2-8}{e^0}=-8$ **1p**

$f'(0)=\frac{(0+2)(4-0)}{e^0}=8$ **1p**

Ecuația tangentei: $y-(-8)=8(x-0) \iff y=8x-8$ **2p**

c) Punctele critice: $f'(x) = 0 \implies x_1 = -2 \in [-3, 4]$ și $x_2 = 4 \in [-3, 4]$ **1p**
Studiul monotoniei pe $[-3, 4]$: $f'(x) < 0$ pe $[-3, -2) \implies f$ este strict descrescătoare pe $[-3, -2]$; $f'(x) > 0$ pe $(-2, 4) \implies f$ este strict crescătoare pe $[-2, 4]$ **2p**
Valoarea minimă pe $[-3, 4]$ este $f(-2) = \frac{(-2)^2-8}{e^{-2}} = -4e^2 \implies f(x) \geq -4e^2$ **1p**
Valoarea maximă pe $[-3, 4]$ este $\max\{f(-3), f(4)\}$. Cum $f(-3) = \frac{9-8}{e^{-3}} = e^3$, $f(4) = \frac{16-8}{e^4} = \frac{8}{e^4}$ și $e^3 > \frac{8}{e^4}$ (deoarece $e^7 > 2^7 = 128 > 8$), rezultă că maximul este $f(-3) = e^3 \implies -4e^2 \leq f(x) \leq e^3$, $\forall x \in [-3, 4]$ **1p**